M Mathematik
Kompetenzerwartung

SKHM

2020-07-15

0 Vorwort

Die Kompetenzerwartung des 1. Fachsemesters 2020 in Mathematik fällt auf Grund der Corona-Pandemie verkürzt aus. Die Themenliste entspricht nicht dem regulärem Umfang des 1. Fachsemesters am Staatlich anerkannten Studienkolleg Halle-Merseburg.

Die Nummer des Abschnitts entspricht in etwa dem Modul. Zu jedem Modul gibt es den Inhalt in Stichpunkten und illustrierende Aufgaben.

1 Mengenlehre und Logik

- Binäre Logik. Entweder Ja oder Nein.
- Nicht, Und, Oder, Entweder-Oder, Wahrheitstabelle
  - Nicht nicht blau ist blau. $\neg(\neg b) = b$
  - Blau und (groß oder rund) ist (blau und groß) oder (blau und rund).
    $b \wedge (g \vee r) = (b \wedge g) \vee (b \vee r)$
  - „Wollen Sie Kaffee oder Tee?“–„Ja.“
- De-Morgan-Regeln

  Nicht (nass und kalt) ist (nicht nass) oder (nicht kalt). $\neg(n \wedge k) = (\neg n) \vee (\neg k)$
- Es gibt, für jedes

  Das Gegenteil von „Jeder Hallenser lügt.“ ist „Es gibt einen Hallenser, der nicht lügt.“.
- Also, Denn, Wenn-Dann, genau dann wenn
  - Es regnet, also ist die Straße nass ($\therefore$). Die Straße ist nass, denn es regnet ($\because$).
  - Wenn es regnet, ist die Straße nass ($\Rightarrow$). Ob es regnet, steht da nicht.
- Beweis durch Widerspruch

  Ein Hallenser sagt „Jeder Hallenser lügt.“. Angenommen er lügt nicht, dann lügt er. Also ist die Annahme falsch. Er lügt. Es gibt einen Hallenser, der nicht lügt. Er ist es nicht. Es muss noch einen Hallenser geben.
- Element, Menge
- Leere Menge, Aufzählung, Aussonderung, Ersetzung

  - $\varnothing = \{\}$
  - $3 \in \{1;2;3;4\}$

- Vereinigung, Schnitt, Ohne, Komplement, Teilmenge
  $\{4;5;6\} \cup \{5;6;7\} = \{4;5;6;7\}$

- Potenzmenge
  $\mathfrak{P}(\{3;4\}) = \{\varnothing;\{3\};\{4\};\{3;4\}\}$

- Mächtigkeit
  $|\{5;6;7\}| = 3$

- Natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen
  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Größer, Kleiner, Gleich, Intervalle
  - $[4;6] \setminus [5;8] = [4;5[$
  - $\{x \in \mathbb{R}\ x < 5\} =]-\infty;5[$

- Venn-Diagramm

- Mehrdeutigkeit in natürlicher Sprache
  - Ein Chinese erfand das Porzellan (es gibt). Ein Chinese ist ein Asiat (für jedes).
  - Es gibt vier Bedeutungen für „sein“, nämlich Existenz, Element, Teilenge und Gleichheit.

2 Polynomgleichungen

- Äquivalenzumformung
  $x + 4 = 6 \Leftrightarrow x = 2$

- Lösungsmenge
  $x = 2 \vee x = 4 \Leftrightarrow x \in \{2;4\}$

- Polynom
  $2x^3 + 2x^2 - 6x + 5$ Polynom mit Grad 3.

- Nullteilerfreiheit, Fallunterscheidung
  $(x+2)(x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 0 \vee x - 4 = 0$

- Binomische Formeln, Vieta
  $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, weil $2 + 3 = 5$ und $2 \cdot 3 = 6$

- Quadratische Ergänzung, pq-Formel, Mitternachtformel
  $x^2 + 4x + 1 = 0$, $p = 4$, $q = 1$, pq-Formel $x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 1}$

- Polynomdivision

  Wenn $x^3 + 5x^2 - 4x - 2$ eine ganzzahlige Nullstelle hat, dann ist die Teiler von -2. Ausprobieren liefert 1. Also gibt es den Faktor $x-1$, also $x^3+5x^2-4x-2 = (x-1)(\ldots)$. Polynomdivision liefert $(\ldots) = (x^2 + 6x + 2)$.

- Biquadratische Gleichung

  Bei $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$ kann man $z = x^2$ substituieren. Dann hat man $z^2 + 2z - 24$. Das ergibt nach Vieta $(z+6)(z-4) = 0$. Das ergibt $z = -6$ oder $z = 4$. Also $x^2 = -6$ oder $x^2 = 4$. $x^2 = -6$ hat keine reelle Lösung. $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen. Also $x = 2$ oder $x = -2$.

3 Wurzelgleichungen

- Quadratwurzel, Kubikwurzel,...

  $\sqrt{9}$ ist das $x \in [0;\infty[$ mit $x^2 = 9$, also $\sqrt{9} = 3$. Analog mit der Kubikwurzel. $\sqrt[3]{-8}$ ist nicht definiert.

- Definitionsmenge

  Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen.

- Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, hat keinen Rückweg.

  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$. Aber $x = 2 \not\Leftarrow x^2 = 4$.

- Phantomlösungen, Probe

  $\sqrt{2x-3} = \sqrt{3x+4}$ ergibt nach Quadrieren $2x - 3 = 3x + 4$ und weiter $x = -7$. Das ist keine Lösung, weil $\sqrt{2 \cdot (-7) - 3}$ nicht definiert ist. Durch Probe fällt das auf. Wenn man quadriert, muss man Probe machen, um Phantomlösungen zu erkennen.

4 Exponential- und Logarithmusgleichungen

- Potenz, Zahlenbereiche für Basis und Exponent

  a^b ist, wenn $a > 0$, für jedes b definiert. Wenn $a < 0$ muss $b \in \mathbb{Z}$ sein. Nur dann funktionieren die Rechenregeln $(a^b)^c = a^{bc}$, $a^c b^c = (ab)^c$ und $a^b a^c = a^{b+c}$.

- Logarithmus

  Für die Basis $b \in]0;\infty[\setminus\{1\}$ und $x \in]0;\infty[$ ist $\log_b(x) \in \mathbb{R}$ mit $b^{\log_b(x)} = x$. Die Rechenregeln sind entsprechend.

- Definitionsmengen für einen Logarithmus

  Die Basis muss positv und ungleich null sein. Das Argument muss positiv sein.

- Exponentialfunktion

  Die Eulerzahl e ist etwas Besonderes. $\log_e$ heißt natürlicher Logarithmus ln.

5 Bruchgleichungen

- Rechenregeln Bruchrechnung
- Definitionslücke weil Nenner null
- Beim Lösen muss man beachten, ob man mit Null multipliziert. Also Probe machen.

  $\frac{2x+3}{4x+5} = \frac{6x+7}{8x+9}$ multipliziert man mit dem Hauptnenner, dann ist es eine Polynomgleichung. Aus $(2x+3)(8x+9) = (6x+7)(4x+5)$ folgt $16x^2+(18+24)x+27 = 24x^2+(30+28)x+35$. Das ergibt dann $-8x^2 - 16x - 8 = 0$, also $x^2 + 2x + 1 = 0$, also $(x+1)^2 = 0$, also $x = -1$. Bei $x = -1$ ist keiner der Nenner null. Also ist die Lösung korrekt.

6 Betraggleichungen und Ungleichungen

- Ungleichung

  Bei $<$ statt $=$ dreht das Zeichen beim Multiplizieren mit etwas Negativem um.

- Betrag
- Fallunterscheidung

  $|2x + 3| < |4x - 5|$ löst man einmal für $2x + 3 < 0$, dann ist $|2x + 3| = -2x - 3$, und einmal für $2x + 3 \geq 0$, dann ist $|2x + 3| = 2x + 3$. Jeden der beiden Fälle löst man einmal für $4x - 5 < 0$, dann ist $|4x - 5| = -4x + 5$, und einmal für $4x - 5 \geq 0$, dann ist $|4x - 5| = 4x - 5$. Dann überprüft man, ob die Lösungen mit den Fällen verträglich sind und fasst die Ergebnisse in der Lösungsmenge zusammen.

7 Komplexe Zahlen

- Die imaginäre Einheit

  $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung. Was es nicht gibt, kann man erfinden. Man nennt es i, $i^2 = -1$.

- Komplexe Zahl, Realteil, Imaginärteil

  Zu $a, b \in \mathbb{R}$ ist die komplexe Zahl $a+ib \in \mathbb{C}$ definiert. a heißt Realteil. b heißt Imaginärteil. Man trägt das in ein Koordinatensystem ein, wobei der Realteil nach rechts und der Imaginärteil nach oben geht.

- Betrag, konjugiert komplex

  Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\overline{a + ib} = a - ib$.

  Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

- Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktion

  $e^{iz} = \cos(z)+i\sin(z)$ gilt für jede komplexe Zahl. Es gelten die Rechenregeln für Potenzen.

- Kartesische Form und Polarform, Polarform als Eulerform oder trigonometrisch

  Für $z \in \mathbb{C}$ ist die kartesische Form $z = \Re(z) + i\Im(z)$. Für $z \neq 0$ kann man einen Winkel φ zur positiven reellen Achse nehmen, und $z = |z|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ schreiben. Das ist die trigonometrische Form, die eine Variante der Polarform. Außerdem ist $z = |z|e^{i\varphi}$, die andere Variante der Polarform.

- Umrechnen von kartesischer Form in Eulerform

  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und φ bekommt man über $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$, wobei man den Quadranten beachten muss, und beliebig oft 2π dazuzählen darf.

- Umrechnen von Eulerform in kartesische Form

  $\Re\left(re^{i\varphi}\right) = r\cos(\varphi)$, $\Im\left(re^{i\varphi}\right) = r\sin(\varphi)$

- Polynomgleichungen mit komplexen Zahlen, algebraische Abgeschlossenheit

  Jedes Polynom vom Grad n, also $a_n x^n + \ldots + a_0$ kann man als Vielfaches eines Produkts aus Linearfaktoren schreiben, also als $a_n(x - b_n)\ldots(x - b_0)$.

8 Übungen zu Komplexe Zahlen

$(x-2)^3 - 8 = 0$ hat drei Lösungen. In Eulerform geschrieben ist das $(x-2)^3 = 8 \cdot e^{n2\pi i}$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig ist. Das ergibt dann $x - 2 = 2 \cdot e^{n\frac{2}{3}\pi i}$. Und das ergibt die drei Lösungen $x = 2e^{0i} + 2$, $x = 2e^{\frac{2}{3}\pi i} + 2$ und $x = 2e^{\frac{4}{3}\pi i} + 2$. Das kann man, weil es bei φ um Vielfache von $\frac{\pi}{6}$ geht, leicht in kartesische Form umrechnen.

9 Funktion

- Funktion

  Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element aus dem Definitionsbereich genau ein Element aus dem Zielbereich zuordnet.

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

- Bild

  Das Bild ist die Menge der Elemente aus dem Zielbreich, die getroffen werden. Der Begriff „Wertebereich“ ist mehrdeutig. Manche bezeichnen das Bild als Wertemenge, und andere bezeichnen das Ziel als Wertemenge.

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ hat das Bild $\{f(x)\,|\,x \in \mathbb{R}\} = [0;\infty[$.

- Injektiv

  Eine Funktion ist injektiv, wenn aus $x \neq y$ folgt, dass $f(x) \neq f(y)$.

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, weil $f(-2) = f(2)$. Nimmt man als Definitionsbreich die nichtnegativen reellen Zahlen, dann ist es injektiv.

- Surjektiv

  Wenn Bild und Ziel gleich sind, also jedes Element aus dem Ziel getroffen wird, dann ist die Funktion surjektiv.

- Bijektiv

  Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, nennt man bijektiv.

$$f : [0;\infty[\to [0;\infty[\quad f(x) = x^2$$

- Umkehrfunktion

  Eine bijektive Funktion f hat eine Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion von f wird f^{-1} genannt.

  $$f : [0; \infty[\to [0; \infty[\quad f(x) = x^2 \qquad f^{-1} : [0; \infty[\to [0; \infty[\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

- Graf

  Der Graf einer Funktion f mit Definitionsbereich D ist die Menge $\{(x, f(x)) \,|\, x \in D\}$. Der Graf der Umkehrfunktion f^{-1} ist das Ganze an der Diagonalen $x = y$ gespiegelt.

- Folge

  Eine Folge ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$. Bei Folgen wird das Argument gewöhnlich als Index und nicht in Klammern geschrieben. Statt $a(n) = 2n + 3$ schreibt man a_n.

- Verkettung

  Ist der Zielbereich von f Teilmenge des Definitionsbereichs von g, dann gibt es die Verknüpfung $g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

  $$f(x) = 2x + 4 \quad g(x) = x^2 \qquad (g \circ f)(x) = (2x + 4)^2 \qquad (f \circ g)(x) = 2x^2 + 4$$

- Monotonie

  f heißt monoton steigend, wenn $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(x)$. f heißt streng monoton steigend, wenn $x > y \Rightarrow f(x) > g(x)$. Monoton fallend und streng monoton fallend analog.

  Konstanten sind sowohl monoton steigend als auch monoton fallend.

- Gerade und ungerade Funktion

  f heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$. Der Graf ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

  f heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$. Der Graf ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

  Polynome sind gerade, genau dann wenn nur gerade Exponenten dabei sind, und ungerade, genau dann wenn nur ungerade Exponenten dabei sind.

10 Grenzwert

- $\lim_{x \to a} f(x) = b$ bedeutet, dass für jede Umgebung U_b von b – egal wie klein – es eine Umgebung U_a gibt, so dass für jedes $x \in U_a$ der Funktionswert $f(x) \in U_b$ ist.

  Für eine reelle Zahl c ist der offene Bereich mit Abstand γ, also $]c-\gamma; c+\gamma[$ eine Umgebung. Und für ∞ ist der offene Bereich ab γ, $]\gamma; \infty[$ eine Umgebung. Für $-\infty$ analog $]-\infty; \gamma[$.

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{3x + 4} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2}{3x + 4} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

- Rechenregeln für Grenzwerte

  Wenn $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x)$ sinnvoll ist und sinnvoll verrechnet werden kann, dann ist

  $$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Damit kann man dann Folgendes rechnen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{6x^2-7x-8} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+3\frac{1}{x}+4\frac{1}{x^2}}{6-7\frac{1}{x}-8\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0+0}{6+0+0} = \frac{1}{3}$$

- Stetigkeit

  f ist stetig im Punkt a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Das heißt, der Graf hat bei a keinen Sprung.

- Polstelle

  Wenn f den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und Zielbereich $\mathbb{R}$ hat, a eine Lücke im Definitionsbereich ist, also es eine Umgebung U_a von a gibt mit $U_a\setminus\{a\} \subset D$, und $\lim_{x\to a}|f(x)| = \infty$, dann ist a eine Polstelle von f.

  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ hat die Polstelle 3.

  $f(x) = \frac{x-2}{(x-3)^2}$ hat die Polstelle 3.

  $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ nur die Polstelle -1. 1 ist eine hebbare Definitionslücke, keine Polstelle.

11 Ableitung

- $f'(x)$ ist die Steigung des Grafen von f an der Stelle x. Das ist der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  f heißt differenzierbar an der Stelle x, wenn $f'(x)$ existiert. f' heißt Ableitung von f. Die Ableitung von der Ableitung heißt zweite Ableitung f''.

- Rechenregeln

  - Potenzregel: Für $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^a$ ist $f'(x) = ax^{a-1}$.
    Konstanten haben die Ableitung null.
    Die Ableitung von $x \mapsto x^5$ ist $x \mapsto 5x^4$.
    Die Ableitung von $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$, weil $\frac{1}{x} = x^{-1}$ und $(-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$.
    Die Ableitung der Quadratwurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, weil $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
    Die Ableitung der Kubikwurzelfunkition $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist $x \mapsto \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
  - Faktorregel: Für $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = ag(x)$ ist $f'(x) = ag'(x)$.
    Die Ableitung von $x \mapsto 3x^2$ ist $x \mapsto 6x$, weil $3 \cdot 2x = 6x$.
  - Summenregel: $(f+g) = f' + g'$
    Die Ableitung von $x \mapsto 2x^2+3x+4$ ist $x \mapsto 4x+3$.
  - Produktregel: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

- Kettenregel $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$
  $f(x) = (x^2 - 2)^3$ kann man erst ausmultiplizieren und dann ableiten

  $$f(x) = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 \qquad f'(x) = 6x^5 - 24x^3 + 24x$$

  Man kann $f = (x^2 - 2)(x^2 - 2)(x^2 - 2)$ nach Produktregel bearbeiten

  $$f(x) = f'(x) = 2x(x^2 - 2)(x^2 - 2) + (x^2 - 2)2x(x^2 - 2) + (x^2 - 2)(x^2 - 2)2x$$

  Und man kann es nach Kettenregel bearbeiten. $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2 - 2$, $f = g \circ h$.

  $$f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 3(x^2 - 2)^2 \cdot 2x$$

- Umkehrregel: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
  Die Umkehrfunktion von sin mit Definitionsbereich $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ist arcsin. Der Definitionsbereich von arcsin ist $[-1; 1]$. Das ergibt dann

  $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

  Weil cos im Bereich $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nichtnegativ ist, kann man $\cos(y) = \sqrt{1 - (\sin(y))^2}$ benutzen, also

  $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $\exp' = \exp$
  $f(x) = e^{2x^2+3x+4}$ kann man nach Kettenregel ableiten.

  $$f'(x) = e^{2x^2+3x+4}(4x + 3)$$

  $f(x) = 2^x$ muss man zuerst umformen. $f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{\ln(2)x}$. Dann ist nach Kettenregel

  $$f'(x) = e^{\ln(2)x} \cdot \ln(2) = \ln(2)2^x$$

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
  Bei anderer Basis muss man auf ln umformen. $\lg(x) = \log_{10}(x) = \frac{1}{\ln(10)} \ln(x)$

  $$\lg'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x}$$

- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad f'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)h'(x)}{(h(x))^2}$
  $f(x) = \frac{3x^2+4x+5}{6x^2+7x+8}$ ergibt mit Zähler $u(x) = 3x^2+4x+5$ und Nenner $v(x) = 6x^2+7x+8$

  $$f'(x) = \frac{(6x + 2)(6x^2 + 7x + 8) - (3x^2 + 4x + 5)(12x + 7)}{(6x^2 + 7x + 8)^2}$$

- Lokale Extremstelle

  Bei einem lokalen Maximum oder Minimum ist die Tangente waagerecht, also die Ableitung null. Das ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum. Ist die Tangente waagerecht und die Ableitung der Ableitung positiv, dann geht es von Gefälle in Steigung, und man hat ein Minimum. Der Extrempunkt zur Extremstelle x ist $(x|f(x))$.

  $f(x) = x^3$ hat bei $x = 0$ kein Minimum, obwohl $f'(0) = 0$.

- Wendestelle

  Geht der Graf von f bei x von Linkskurve in Rechtskurve oder umgekehrt, dann hat die Ableitung eine lokale Extremstelle. Also ist $f'(x) = 0$ notwendig, und wenn dann noch $f''(x) \neq 0$, ist das hinreichend. Die Wendetangente ist eine Gerade und hat die Funktionsgleichung $\xi \mapsto f'(x)(\xi - x) + f(x)$. Der Wendepunkt zur Wendestelle x ist der $(x|f(x))$.

- L'Hospital

  Wenn $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, und $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$$